Diagonal del Cuadrado, Trigonometría y Geometría

Ingrid Judith Orozco Martínez
Doctora en Matemática Aplicada
FAREM-Matagalpa
https://orcid.org/0000-0002-1362-3579
judithorozco655@gmail.com

Iván Augusto Cisneros Díaz
Doctor en Matemática Aplicada
UNAN – Managua, Nicaragua
https://orcid.org/0000-0003-2014-1946
ivan.cisneros@unan.edu.ni

Resumen

Este trabajo refleja como la teoría trigonométrica plana se puede utilizar en combinación con los contenidos de la geometría euclidiana, para la obtención de las fórmulas usuales del cálculo de la diagonal de un cuadrado. Estos resultados son producto de la interrelación entre los conceptos generales de la teoría trigonométrica con la geometría. El objetivo principal es demostrar que, mediante el uso de las propiedades e identidades trigonométricas fundamentales, es posible obtener las fórmulas clásicas geométricas acerca de la diagonal de un cuadrado. También se aplican el Teorema del Coseno para deducir el valor de la diagonal de un cuadrado. Es necesario señalar que esta teoría trigonométrica se desarrolla en el undécimo año de los programas analíticos de la educación básica media, por tanto, son susceptible de poder combinarlo con teoría geométrica para obtener estos mismos resultados. Por otro lado, toda la teoría utilizada en la construcción de estas demostraciones permite entrelazar de manera lógica y coherente teoría matemática que unificada permiten dar nuevos enfoques didácticos para el desarrollo analítico demostrativos de la geometría. Esto permite mostrar diversas estrategias conceptuales y analíticas de demostración matemática.

Palabras claves: Diagonal, Geometría, Método Constructivo, Trigonometría,

Abstract

This work reflects how plane trigonometric theory can be used in combination with the contents of Euclidean geometry, to obtain the usual formulas for calculating the diagonal of a square. These results are a product of the interrelation between the general concepts of trigonometric theory with geometry. The main objective is to demonstrate that by using the fundamental trigonometric properties and identities, it is possible to obtain the classical geometric formulas about the diagonal of a square. The Cosine Theorem is also applied to deduce the value of the diagonal of a square. It is necessary to point out that this trigonometric theory is developed in the eleventh year of the analytical programs of secondary basic education, therefore, they are susceptible to being able to combine it with geometric theory to obtain these same results. On the other hand, all the theory used in the construction of these demonstrations allows for the logical and coherent interweaving of mathematical theory that, when unified, allows for new didactic approaches for the analytical development of demonstrative geometry. This allows us to show various conceptual and analytical strategies for mathematical demonstration.

Keywords: Diagonal, Geometry, Construction Method, Trigonometry.

Introducción

Existen numerosas aplicaciones del cálculo de la diagonal de un cuadrado, las cuales pueden ser referidas principalmente a la separación de dos partículas móviles con un mismo punto de salida, por otro lado, también nos permite poder aplicar teoría matemática, tales como el Teorema de Pitágoras, Teorema de la Altura, Teorema del Cateto, etc. Todos ellos en vista de obtener la magnitud de cierta cantidad desconocida en función de otras. Estos nos permiten estudiar problemas prácticos y teóricos que involucran el estudio de la geometría y teoría trigonométrica, de manera que esta combinación produzca nuevos aspectos del conocimiento matemático con el fin de obtener nuevas variantes de las fórmulas de la diagonal de un cuadrado.

Esta combinación plantea un nuevo enfoque didáctico y demostrativo, el cual consiste en poder construir diferentes variantes de las demostraciones matemáticas de cálculo de la diagonal del cuadrado.

Los nuevos teoremas presentados en este artículo están referidos a la combinación de ambas disciplinas matemáticas, permitiendo el desarrollo teórico, procedimental y práctico de la ciencia matemática.

Entre los principales valores metodológicos de este artículo, se pueden mencionar:

1. Aplicación de la teoría trigonométrica y geométrica originando nuevos enfoques y técnicas de demostración matemáticas.
2. Desarrollo de nuevas estrategias y procesos lógicos en las demostraciones matemáticas.
3. Justificar la necesidad de búsqueda de nuevos enfoques de paradigmas matemáticos demostrativos.
4. Aplicación de teoremas generales geométricos y trigonométricos para obtener nuevos enfoques demostrativos.

Esto nos permite mostrar el amplio campo de estrategias demostrativa, donde el análisis y el pensamiento lógico, nos proporcionen justificaciones objetivas a utilizar en los procesos demostrativos de la matemática.

Materiales y Métodos

La metodología empleada en este trabajo siguió las siguientes etapas:

1. Revisión bibliográfica sobre los procesos demostrativos de las fórmulas de la diagonal del cuadrado.

2. Construcción de nuevos procedimientos matemáticos que involucran la teoría geométrica y trigonométrica.

3. Formulación de nuevos procesos y enfoques demostrativos de la matemática.

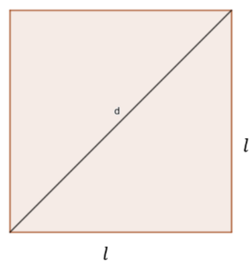
Fórmulas de la Diagonal del Cuadrado

Teorema 1: La diagonal de un cuadrado de lado **l** es:

$$d = \sqrt{2}\, l$$

Demostración 1:

Dada la figura del cuadrado, donde $\boldsymbol{l}$ es lado y **d** es la diagonal del cuadrado



por Teorema de Pitágoras, (Zill, 2012), se tiene

$$d^2 = l^2 + l^2$$

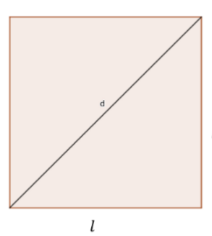
$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = \sqrt{2}\, l$$

Demostración 2:

Aplicando el teorema del coseno (Swokowski, 2009) a la figura siguiente, donde $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{d}$ son el lado e hipotenusa del triángulo indicado



se obtiene que el valor de la diagonal es

$$d^2 = l^2 + l^2 - 2l^2 cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

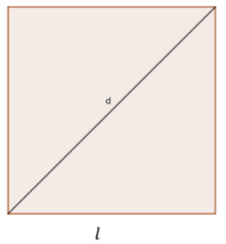
$$d^2 = l^2 + l^2 - 2l^2(0)$$

$$d = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2}\, l$$

Demostración 3:

De acuerdo a la figura, donde $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{d}$ son el lado e hipotenusa del triángulo indicado



La diagonal de un cuadrado constituye una bisectriz de cada uno de sus ángulos, (Barnet, 1991) en consecuencia

$$sen\ 45° = \frac{l}{d}$$

$$cos\ 45° = \frac{l}{d}$$

elevando al cuadrado ambos términos y sumando, se obtiene

$$sen^2 45° + cos^2 45° = \left(\frac{l}{d}\right)^2 + \left(\frac{l}{d}\right)^2$$

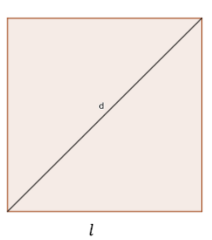
$$1 = 2\frac{l^2}{d^2}$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2}\, l$$

Demostración 4:

Se sabe por la figura, que $\boldsymbol{l}$ y $\boldsymbol{d}$ son el lado e hipotenusa del triángulo indicado



Luego $sen45° = \frac{l}{d}$, al despejar l se tiene $l = dsen\,45°$, de manera similar, $cos45° = \frac{l}{d}$, nuevamente al despejar l , se tiene $l = dcos\,45°$, elevando al cuadrado dichas expresiones, se obtiene

$$d^2sen^2 45° = l^2$$

$$d^2cos^2 45° = l^2$$

sumando término a término

$$d^2sen^2 45° + d^2cos^2 45 = l^2 + l^2$$

$$d^2(sen^2 45° + cos^2 45) = 2l^2$$

$$d^2(1) = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2}\,l$$

Conclusiones

Luego de haber realizado el análisis detallado de las demostraciones anteriores se llegó a las conclusiones siguientes:

1. Demostración de 4 teoremas referidos a la diagonal del cuadrado, todos ellos con el mismo resultado, pero con variantes demostrativas diferentes.

2. Teorema equivalentes obtenidos mediante la aplicación de propiedades geométricas que involucran el Teorema de Pitágoras, Teorema del Coseno e Identidad Pitagórica Fundamental.

Bibliografía

Barnet, R. (1991). Geometría, segunda edición. Editorial Mc Graw Hill. México.

Swokowski, E. y Cole, J. (2009). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 12a Edición. Thomson, México. 2006.

Zill, D. y Deward, J. (2012). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, tercera edición, Colombia, editorial McGraw Hill.