Algunos Tópicos en Teoría de Probabilidad

Función de Distribución de Probabilidad para una Variable Continua y sus Momentos

Marlon Antonio Hurtado Obando

Máster en Matemática Aplicada

UNI-Managua

ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6958-0715

Hurtado.obando21@gmail.com

Resumen

El presente trabajo consta de algunos tópicos relacionados a la teoría de probabilidades explicadas con ejemplos que desarrollan una metodología clara y precisa muy propia del autor de este trabajo.

Dentro del objetivo principal está detallar de manera analítica la teoría relacionada a la función de distribución de probabilidad y sus respectivos momentos, cuyos resultados serán contrastados con problemas ya resueltos y así brindar un material bibliográfico el cual puede ser consultado por docentes y estudiantes que desean aprender sobre la teoría de probabilidades mediante una metodología más fácil y sencilla de entender, resaltando que estos contenidos necesitan ser comprendidos desde la teoría ya que son de un nivel intermedio-complejo para la comprensión del lector.

Se proponen ejemplos en cada uno de temas, los cuales abordan las distribuciones de probabilidad continua.

Palabras Claves: distribución de probabilidad, distribuciones continuas, momentos

Abstract

The present work consists of some topics related to the theory of probabilities explained with examples that develop a clear and precise methodology very characteristic of the author of this work.

Within the main objective is to detail in an analytical way the theory related to the probability distribution function and its respective moments, whose results will be contrasted with problems already solved and thus provide a bibliographic material which can be consulted by teachers and students who wish to learn about probability theory through a methodology easier and simpler to understand, emphasizing that these contents need to be understood from the theory since they are of an intermediate-complex level for the reader's comprehension.

Examples are proposed in each of the topics, which deal with continuous probability distributions.

Keyword: **probability distribution, continuous distributions, moments**

Introducción

El presente artículo aborda algunos tópicos de la Teoría de Probabilidades en esencia la función de distribución de probabilidad con sus respectivos momentos de valor esperado y varianza. Primeramente, se abordan algunas generalidades de esta teoría como definiciones y conceptos básicos, propiedades axiomáticas de Kolmogorov, las principales definiciones y operaciones probabilísticas de adición, complemento, unión, producto e intersección de eventos probabilísticos y teoremas. Luego, se definen las variables aleatorias continuas, con un análisis en cada una de sus propiedades y con ejemplos desarrollados.

Valores metodológicos en este articulo

1. Diseño de explicación sobre las distribuciones de probabilidad continuas con ejemplos mediante la teoría de probabilidad.
2. Evidenciar la importancia sobre la búsqueda de nuevos enfoques de paradigmas matemáticos metodológicos.

Materiales y Métodos

La metodología empleada en este trabajo de tesis siguió las siguientes etapas:

1. Se revisó el estado del arte sobre la teoría de probabilidad, la cual consistió en analizar la metodología y la aplicación de la programación de las diferentes distribuciones de probabilidad, esta revisión se efectuó en más de 20 artículos entre ellos libros y revistas relacionadas en este campo, lo que permitió abrir la oportunidad para enlazar estos conocimientos los cuales serán de mucho provecho para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de probabilidad.

2. Se estudiaron más de 20 distribuciones de probabilidad, sus definiciones, propiedades, teoremas y axiomas a considerar para crear un algoritmo de programación, para esta publicación se presentan algunas de ellas.

3. Mediante la revisión se establece una metodología de manera clara y sencilla en la que se ejemplifica cada una de las distribuciones de probabilidad continuas que aborda la teoría de probabilidades.

Algunos Tópicos en la Teoría de Probabilidad

Propiedades de Probabilidad

Las siguientes propiedades de probabilidad son utiles en cálculo

Proposición: Sea $(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\mathcal{F}}, \boldsymbol{P})$ un espacio de probabilidad. Entonces

i) $P(A^c) = 1 - P(A)$

ii) Si $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$ y $P(B \,/\, A) = P(B) - P(A)$

iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración

i) Ya que P es finitamente aditivo, entonces

$$1 = P(\Omega) = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

Por tanto, $P(A^c) = 1 - P(A)$

ii) Desde que $B = A \cup (B/A)$ con $A \cap (B/A) = \emptyset$, entonces

$$P(B) = \mathrm{P}\big(A \cup (B/A)\big) = P(A) + P(B/A)$$

por tanto $P(A) \leq P(B)$ y $P(B/A) = P(B) - P(A)$

iii) Como $A \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup (B/(A \cap B))$ con $\mathrm{A} \cap (B/(A \cap B)) = \emptyset$, entonces

iv) $P(A \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P}(B/(A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

v) La propiedad "iii" puede extenderse a más de tres eventos, por ejemplo

vi) $P(A \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

EJEMPLO 1. En cada intento de un juego, la probabilidad de ganar es 1%. Si un jugador juega tres veces, la probabilidad de ganar al menos una vez es de 3%. ¿es esto verdadero o falso?

Solución. Para $i = 1,2,3$, sea A_i el evento: "el jugador gana en el intento i". El evento "el jugador gana al menos una vez" es $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Por lo tanto,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Desde luego $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subset A_1 \cap A_3$, entonces $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \leq P(A_1 \cap A_3)$. Por lo tanto, si esto es posible para ganar más de una vez,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \leq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) < 3\%$$

Con esto la afirmación es falsa.

Función de Densidad de Probabilidad en una Variable Aleatoria Discreta

la función $f: \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por $f(x) = P(X = x)$ es llamada la función de densidad de probabilidad.

Se deduce la siguiente definición que $f(x) = 0$ para $x \notin \Omega$ y $f(x) > 0$ para $X \in \Omega$, además:

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) = P(\ X \in \Omega) = 1$$

Así la función de densidad de probabilidad f de una variable aleatoria discreta X toma valores en $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\}$ **satisface las siguientes propiedades**:

i) $f(x) \geq 0$ para cada $X \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 0$ si $X \notin\ \Omega$

iii) $\sum_i f(x_i) = 1$

Funciones de Distribución de Probabilidad para una Variable Aleatoria Continua

Distribución Beta y sus Momentos

La distribución Beta es empleada para variables aleatorias que toman valores en el intervalo [0,1]. Tiene dos parámetros a y b ambos estrictamente positivos. La distribución acumulativa es:

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \qquad x \in [0,1]$$

Puede ser probado que:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{dx} = \frac{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})}$$

Lo cual implica:

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{dx} = 1.$$

Por tanto, $f(x)$ es de hecho una función de distribución de probabilidad.

Cuando $a = b = 1$, entonces la distribución acumulativa coincide con la distribución acumulativa de la distribución uniforme continua en el intervalo $[0,1]$ puede ser visto como un caso particular de la distribución Beta, llamado $Beta(0,1)$.

El **valor esperado** de una variable aleatoria X con una distribución $Beta(a,b)$ puede ser calculada como:

$$E(X) = \int_0^1 x \frac{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{dx} = \frac{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})} . \int_0^1 x^{a}(1-x)^{b-1}\mathrm{dx} =$$

$$\frac{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})} \cdot \frac{\Gamma(\mathrm{a}+1)\Gamma(\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a}+1+\mathrm{b})} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\mathrm{b}}.$$

Ahora vamos a calcular el segundo momento.

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \frac{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{dx} = \frac{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})} \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b}\mathrm{dx} =$$

$$\frac{\Gamma(\mathrm{a}+\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})}\cdot\frac{\Gamma(\mathrm{a}+2)\Gamma(\mathrm{b})}{\Gamma(\mathrm{a}+2+\mathrm{b})}=\frac{\mathrm{a}(a+1)}{(\mathrm{a}+\mathrm{b})(a+b+1)}.$$

Por tanto, la **varianza** para la variable aleatoria es:

$$Var(X)=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\frac{a^2}{(a+b)^2}=\frac{a}{a+b}\left(\frac{a+1}{a+b+1}-\frac{a}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a}{a+b}\frac{b}{(a+b)(a+b+1)}=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

Distribución Gamma y sus Momentos

Antes de introducir la distribución Gamma necesitamos definir la función Gamma. La función Gamma está definida para $x>0$ como:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du.$$

Para algunos valores particulares de x, La función Gamma tiene una expresión explícita. En general solo la expresión como una integral está disponible (función de este tipo es llamada función especial). A continuación, algunos valores y propiedades:

- $\Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma(1)=1$
- $\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$
- $\Gamma(\mathrm{n})=(n-1)!, n\in\mathbb{N}$

Como se observa en las propiedades anteriores, podemos interpretar la función Gamma como una extensión de la factorial para números reales positivos.

La distribución Gamma tiene dos parámetros k y λ, ambos estrictamente positivos. La función de densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(x)=\frac{\lambda^k}{\Gamma(x)}x^{k-1}e^{-\lambda x}, x\in[0,\infty)$$

Si X sigue una distribución Gamma con parámetros k y λ, esto se expresa como $X \sim Gamma(k,\lambda)$.

El parámetro k es llamado parámetro de forma. Cuando $k = 1$ y la escala del parámetro λ (el cambio en la medida) coincide con la distribución exponencial con parámetro λ. En otras palabras, la distribución Exponencial es un caso particular de la distribución Gamma.

El **valor esperado** y la **varianza** de una variable aleatoria con distribución Gamma.

$$E(X) = \frac{k}{\lambda}.$$

$$Var(X) = \frac{k}{\lambda^2}.$$

EJEMPLO: un numero de clientes visita cierta tienda en un intervalo de tiempo, tiene un distribucion de Poisson con parametro que es proporcional a la medida del intervalo de tiempo. El numero de clientes en un intervalo de tiempo independiente son estocasticamente independiente. Sabemos que, la media, 20 clientes visita la tienda en una hora.

a. encuentre la distribucion de probabilidad del tiempo de espera (en minutos) para el tercer cliente que visita la tienda.
b. Luego, encuentre la probabilidad que el timepo de espera para el tercer cliente exceda una hora.

Solución: Sea N_T el numero de clientes que visita la tienda en un intervalo de tiempo $[0, T]$, donde el tiempo es medido en minutos. La variable aleatoria N_T tiene una distribucion de Poisson con parametros λT para algún λ. Desde que, la media es de 20 clientes que llegan a la tienda en 60 minutos, entonces, $E(N_{60}) = \lambda \cdot 60 = 20$, lo cual implica que $\lambda = \frac{1}{3}$. Ya sabemos que cuando el numero de clientes que llegan a la tienda sigue una distribucion de Poisson, entonces el tiempo de espera para cada cliente que llega tiene sigue una distribucion exponencial con el mismo parametro. Ademas, el tiempo intervalo de llegada son estocasticamente independientes.por las propiedades de la distribucion Gamma, el tiempo de espera

X para el tercer cliente que llega a la tienda sigue una distribucion Gamma con el parametro de forma igual a 3 y un parametro de escala igual 1/3, así:

$$X \sim Gamma(3, 1/3\ ).$$

Para encontrar la probabilidad del tiempo de espera para el tercer cliente exceda 1 hora, podemos usar la distribucion de Poisson:

$$P(X > 60) = P(N_{60} < 3) = P(N_{60} = 0) + P(N_{60} = 1) + P(N_{60} = 2)$$

$$= e^{-20} + 20e^{-20} + 20^2 \frac{e^{-20}}{2} = e^{-20}(1 + 20 + 200) \approx 4.55 \times 10^{-7}.$$

La distribucion Gamma con parametro de forma $k = \frac{1}{2}$ es relacioanda a la distribucion Normal.

Distribución Exponencial y sus Momentos

Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial con parámetros $\lambda > 0$, lo cual se expresa como $X \sim Exp(\lambda)$, cuya función de densidad de probabilidad es la siguiente:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \in [0, \infty)$$

La función de distribución acumulativa $F(x) = 0, \forall x \leq 0$ y,

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\, du = -\left[e^{-\lambda u}\right]_0^x = \mathbf{1 - e^{-\lambda x}},\ \ \forall x > 0\,.$$

El primer momento es equivalente al valor esperado,

$$E(X) = \int_0^\infty 1 - F(x) dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\frac{1}{\lambda}\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

El **segundo momento** es:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{\infty} x^2\, \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= -\left[x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{2}{\lambda} E(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Por tanto, la **varianza** es:

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

EJEMPLO: El tiempo de visa de una lámpara (en miles de horas) es una variable aleatoria con distribución exponencial y parámetro $\lambda = 1$. ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara se funda dentro de las primeras 100 horas de funcionamiento?

Solución: Sea X el tiempo de vida de lámpara en miles de horas. En la unidad de tiempo de miles de horas, podemos escribir: 100 horas=0.1 miles de horas. Sea $F(x)$ la función de densidad acumulativa, entonces,

$$P(X \leq 0.1) = F(0.1) = 1 - e^{-0.1} \approx 0.0952.$$

Conclusiones

Las principales conclusiones obtenidas en este articulo relativo a la teoría de Probabilidad se pueden señalar por las siguientes aseveraciones:

Definiciones generales de la teoría de probabilidad axiomática de Kolmogorv, así mismo como sus principales propiedades analíticas.

Ejemplificación para algunas de las diferentes distribuciones de probabilidad continua que se abordaron en este trabajo.

Se demostraron los principales teoremas relativos a la probabilidad axiomática de Kolmogorov, así como algunos valores esperados y varianzas de las principales distribuciones probabilísticas teóricas discretas.

Bibliografía

Álvarez, M. A. (2008). *Introducción a la Teoría de la Probabilidad.* México: Empresa Certificada ISO.

Athreya, K. B., & Lahiri, S. (2006). *Measure Theory and Probability Theory.* Florida: Editorial Board.

Cárcamo, J. (s.f.). *Tema 2 Espacios de Probabilidad.* Madrid, España: Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid.

Dunbar, N. B. (2007). *Mathematics Higher Level.* Fabio Cirrito.

Escalante, J. S. (2017). *Análisis de la calendarización y asignación presupuestal de los proyectos de.* Puebla: Benemerita Universidad de Puebla.

Fannon, P., Kadelburg, V., Woolley, B., & Ward, S. (2013). *Statistics and Probability.* Edinburgh, Cambridge: Cambridge university Press.

Feller, W. (1957). *And Introduction to Probability Theory and Its Application.* United States of American: Priceton University.

Harcet, J., Heinrichs, L., Seiler, P. M., & Torres Skoumal, M. (2014). *Mathematics Higher Level, STATISTICS.* Great Britain: Oxford University Press.

Pino, J. T. (1999). *Fiabilidad: La distribución Lognormal.* Centro Nacional Condiciones de Trababajo, España.

Río, A. Q. (04 de septiembre de 2019). *Estadística Básica Edulcorada*. https://bookdown.org/aquintela/EBE/