Perímetro del Cuadrado, Trigonometría y Geometría

Ingrid Judith Orozco Martínez
Doctora en Matemática Aplicada
FAREM-Matagalpa
https://orcid.org/0000-0002-1362-3579
judithorozco655@gmail.com

Iván Augusto Cisneros Díaz
Doctor en Matemática Aplicada
UNAN – Managua, Nicaragua
https://orcid.org/0000-0003-2014-1946
ivan.cisneros@unan.edu.ni

Resumen

Este trabajo contiene una serie de propiedades relativas al cálculo de la magnitud del perímetro del cuadrado, todo ellos en función de la diagonal, área y lado del mismo. Enfatiza como la teoría trigonométrica se puede fusionar con los contenidos geométricos, con el objetivo de obtener nuevas fórmulas relativas al cálculo del perímetro. Lo novedoso de la aplicación de este conocimiento es como aprovechar las propiedades trigonométricas y utilizar en correspondencia con expresiones algebraicas que, de manera equivalente, nos permite obtener nuevas fórmulas matemáticas. Esta fusión de la teoría trigonométrica con la geometría, nos proporciona nuevas estrategias demostrativas que utilizan propiedades e identidades trigonométricas y conocimientos geométricos, para obtener las fórmulas clásicas geométricas acerca del perímetro de un cuadrado. La teoría utilizada en la construcción de estas demostraciones permite manifestar de manera precisa y coherente la aplicación de un pensamiento crítico y lógico de la teoría matemática, permitiéndonos dar nuevos enfoques didácticos para el desarrollo demostrativos de la geometría. Esto permite mostrar diversos enfoques y estrategias conceptuales, que permiten el análisis de la demostración matemática.

Palabras claves: Perímetro, Geometría, Enfoque Didáctico, Trigonometría.

Abstract

This work contains a series of properties related to the calculation of the magnitude of the perimeter of the square, all of them depending on the diagonal, area and side of the square. Emphasizes how trigonometric theory can be merged with geometric content, with the aim of obtaining new formulas related to the calculation of perimeter. The novelty of the application of this knowledge is how to take advantage of the trigonometric properties and use them in correspondence with algebraic expressions that, in an equivalent way, allow us to obtain new mathematical formulas. This fusion of trigonometric theory with geometry provides us with new demonstrative strategies that use trigonometric properties and identities and geometric knowledge to obtain the classical geometric formulas about the perimeter of a square. The theory used in the construction of these demonstrations allows us to express in a precise and coherent manner the application of critical and logical thinking of mathematical theory, allowing us to provide new didactic approaches for the development of geometric demonstrations. This allows us to show various conceptual approaches and strategies, which allow the analysis of mathematical demonstration.

Keywords: Perimeter, Geometry, Didactic Approach, Trigonometry.

Introducción

La cantidad de lados o segmento de una figura geométrica determina el tipo de clasificación del objeto geométrico, pero también puede intervenir si la figura geométrica es regular o irregular, dependiendo si la magnitud del lado es igual o desigual. En el caso del cuadrado todos los lados son iguales y esto lo convierte en un polígono regular, ya que todos sus lados y ángulos internos también lo son. Por esta razón, el estudio del cuadrado constituye un elemento rico y fascinante en propiedades y relaciones con otros polígonos.

Los teoremas desarrollados plantean relaciones entre la diagonal, lados y área del cuadrado y a partir de estas relaciones, se obtienen nuevas fórmulas del perímetro, las cuales se expresan en función de la trigonometría y de sus ángulos. Vale señalar que las definiciones de las funciones seno y cosenos juegan un papel fundamental en estas relaciones y a partir de ellas, se forman nuevas fórmulas del cálculo del perímetro del cuadrado. Por otro lado, la teoría de la geometría aplicada a este polígono resulta de manera natural, como suma de todas las magnitudes de los lados del cuadrado.

El poder combinar los elementos del cuadrado, tales como los lados, diagonal y su área, nos permite plantear un nuevo enfoque didáctico y demostrativo, el cual consiste en poder construir diferentes variantes de las demostraciones matemáticas de cálculo del perímetro del cuadrado.

Los teoremas presentados en este artículo están deducidos de estas relaciones y nos muestra la posibilidad de combinar disciplinas matemáticas, tales como la trigonometría y geometría, permitiéndonos el desarrollo teórico, procedimental y práctico de la ciencia matemática.

Entre los principales valores metodológicos de este artículo, se pueden mencionar:

1. Aplicación de la teoría trigonométrica y geométrica para implementar en nuevos procesos de demostración matemáticas.
2. Desarrollo de nuevas estrategias lógicas en las demostraciones matemáticas.
3. Justificar la necesidad de búsqueda de nuevos enfoques de paradigmas matemáticos demostrativos.
4. Aplicación de teoremas generales geométricos y trigonométricos para obtener nuevos resultados y fórmulas matemáticas.

Esto nos permite mostrar la posibilidad de ampliar estrategias demostrativas, donde el análisis y el pensamiento lógico, nos proporcionen justificaciones objetivas a utilizar en los procesos demostrativos de la matemática.

Materiales y Métodos

La metodología empleada en este trabajo siguió las siguientes etapas:

1. Revisión matemáticas sobre los procesos demostrativos de las fórmulas del perímetro del cuadrado.

2. Construcción de nuevos procesos, técnicas y métodos matemáticos que involucran la teoría geométrica y trigonométrica.

3. Formulación de nuevos procesos y enfoques demostrativos de la matemática.

Fórmulas del Perímetro del Cuadrado

Teorema 1: El perímetro del cuadrado con diagonal **d** es

$$P = 4d\ sen\ \frac{\pi}{4}$$

Demostración:

El perímetro del cuadrado es $P = 4l$, (Barnet, 1991) además se sabe que $l = dsen\ \frac{\pi}{4}$, entonces por una simple sustitución se tiene

$$P = 4d\ sen\ \frac{\pi}{4}$$

Teorema 2: El perímetro del cuadrado con diagonal **d** es

$$P = 2\sqrt{2}d$$

Demostración:

El perímetro del cuadrado es $P = 4l$, (Barnet, 1991) además se sabe que $l = dsen\ \frac{\pi}{4} = d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, entonces por una simple sustitución se tiene

$$P = 4l$$

$$P = 4d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P = 2\sqrt{2}d$$

Teorema 3: El perímetro del cuadrado con diagonal **d** es

$$P = 4d\ cos\ \frac{\pi}{4}$$

Demostración:

El perímetro del cuadrado es $P\ =\ 4l$, (Barnet, 1991) además se sabe que $l = d\ cos\ \frac{\pi}{4}$, entonces por una simple sustitución se tiene

$$P = 4l$$

$$P = d\ cos\ \frac{\pi}{4}$$

Teorema 4: El perímetro del cuadrado con diagonal **d** es

$$P = 2\sqrt{2}d$$

Demostración:

El perímetro del cuadrado es $P\ =\ 4l$, (Barnet, 1991) además se sabe que $l = d\ cos\ \frac{\pi}{4}$, entonces por una simple sustitución se tiene

$$P = 4l$$

$$P = 4d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P = 2\sqrt{2}d$$

Teorema 5: El perímetro de un cuadrado con área **A** es

$$P\ =\ 4\sqrt{A}$$

Demostración:

Se sabe que el perímetro del cuadrado es $P = 4l$, elevando al cuadrado la expresión anterior

$$P^2 = 16l^2$$

Pero como el área de cuadrado (Barnet, 1991) es

$$A = l^2$$

entonces, sustituyendo el área del cuadrado $l^2 = A$, (Barnet, 1991) tenemos

$$P^2 = 16A$$

de donde, al tomar raíz cuadrada

$$P = 4\sqrt{A}$$

Teorema 6: El área del cuadrado en función del perímetro **P** es

$$A = \frac{P^2}{16}$$

Demostración:

Se sabe que el perímetro del cuadrado es $P = 4\sqrt{A}$, al despejar la raíz del área $\frac{P}{4} = \sqrt{A}$, elevando al cuadrado, se obtiene

$$A = \frac{P^2}{16}$$

Teorema 7: El cuadrado del perímetro de un cuadrado en función de la diagonal **(d)** es

$$P^2 = 16d^2 sen^2 \frac{\pi}{4}$$

Demostración:

Se sabe que el perímetro del cuadrado es $P = 4l$, (Barnet, 1991) sabemos que el lado de un cuadrado está dado por

$$l = d\ sen\ \frac{\pi}{4}$$

$$P = 4\left(d\ sen\ \frac{\pi}{4}\right)$$

luego, elevando al cuadrado P

$$P^2 = \left(4d\ sen\ \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$P^2 = 16\, d^2\ sen^2 \frac{\pi}{4}$$

Teorema 8: El cuadrado del perímetro de un cuadrado en función de la diagonal **d** es

$$P^2 = 16\, d^2\, cos^2 \frac{\pi}{4}$$

Demostración:

Se sabe que el perímetro del cuadrado es $P = 4l$, (Barnet, 1991) sabemos que el lado de un cuadrado está dado por $l = d\ cos\ \frac{\pi}{4}$, luego, elevando al cuadrado P y sustituyendo el valor de l

$$P^2 = \left(4d\ cos\ \frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$P^2 = 16\, d^2\ cos^2 \frac{\pi}{4}$$

Teorema 9: El perímetro de un cuadrado en función de la diagonal **d** es

$$P = 2\sqrt{2}\, d$$

Demostración:

Se sabe que el cuadrado del perímetro es

$$P^2 = 16\, d^2\ cos^2 \frac{\pi}{4}$$

$$P^2 = 16\, d^2\ sin^2 \frac{\pi}{4}$$

sumando ambas expresiones miembros a miembro, obtenemos

$$2P^2 = 16\, d^2\ cos^2 \frac{\pi}{4} + 16\, d^2\ sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$2P^2 = 16\, d^2\ \left(cos^2 \frac{\pi}{4} + sin^2 \frac{\pi}{4}\right)$$

$$P^2 = 8\, d^2$$

$$P = 2\sqrt{2}\ \mathrm{d}$$

Teorema 10: El cuadrado del perímetro de un cuadrado con diagonal **d** es

$$P^2 = 16\, d^2\, sen\, \frac{\pi}{4}\, cos\, \frac{\pi}{4}$$

Demostración:

Se sabe que el perímetro del cuadrado es $P = 4l$, (Barnet, 1991) luego $P^2 = 16\, l^2$, además, se sabe que $l = d \cos\frac{\pi}{4}$ y $l = d\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}$, entonces, sustituyendo el valor de l en $P^2 = 16\, l^2$, se obtiene

$$P^2 = 16\, d^2\, sen\, \frac{\pi}{4}\, cos\, \frac{\pi}{4}$$

Teorema 11: El perímetro de un cuadrado con diagonal **d** es

$$P = \sqrt{8}\, d$$

Demostración:

Se sabe que el cuadrado del perímetro de un cuadrado es $P^2 = 16\, d^2\, sen\, \frac{\pi}{4}\, cos\, \frac{\pi}{4}$ y sabiendo que $sen\, \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = cos\, \frac{\pi}{4}$ sustituyendo

$$P^2 = 16\, d^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$P^2 = 8\, d^2$$

$$P = \sqrt{8}\, d$$

Conclusiones

Luego de haber realizado el análisis detallado de las demostraciones anteriores se llegó a las conclusiones siguientes:

1. Demostración de 11 teorema referido al perímetro del cuadrado, en función de la diagonal, área y lado, todo esto manifiesta el poder de combinar diversas teorías matemáticas.

2. Independientemente de los diferentes enfoques demostrativos, el resultado del teorema es el mismo, con la diferencia de aplicar diversa teoría matemática.

Bibliografía

Barnet, R. (1991). Geometría, segunda edición. Editorial Mc Graw Hill. México.

Swokowski, E. y Cole, J. (2009). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. 12a Edición. Thomson, México. 2006.

Zill, D. y Deward, J. (2012). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica, tercera edición, Colombia, editorial McGraw Hill.